Problem Set 1

1. 令 $m = 7 \cdot 10^7$. 求证: 有无穷多个 n 使得 $n+1, n+2, \ldots, n+m$ 这 m 个数中仅有 $n+m-2$ 是素数, 其余都是合数.

2. 设 $x \geq 2$ 是正整数, 求证

$$\prod_{p \leq x}(1 - \frac{1}{p}) \leq \frac{1}{\log x},$$

其中 $\prod\limits_{p \leq x}$ 表示过所有不大于 x 的素数 p 的乘积.

3. 令 $x \in \mathbb{Z}^+$, 求证

$$|\sum_{n=1}^{x} \frac{\mu(n)}{n}| \leq 1$$

其中 $\mu(\cdot)$ 是 Möbius 函数.

4. 对 $Re(s) > 1$ 定义 $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, 求证: $\zeta(s)$ 在 $Re(s) > 1$ 上解析.

5. 考虑解析延拓后的 Riemann zeta 函数 $\zeta(s)$. 求证: 当实数 s 满足 $0 < s < 1$ 时, $\zeta(s) \neq 0$.

6. (1) 求证: $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ 等价于 $\psi(x) \sim x$ $(x \to +\infty)$.

(2) 上述 (1) 中结论换句话表述也就是说

$$\frac{\pi(x) - \frac{x}{\log x}}{\frac{x}{\log x}} \to 0 \text{ 等价于 } \frac{\psi(x) - x}{x} \to 0 \ (x \to +\infty).$$

那么思考

$$\frac{\pi(x) - \frac{x}{\log x}}{\frac{x}{(\log x)^2}} \to 0 \text{ 是否等价于 } \frac{\psi(x) - x}{\frac{x}{\log x}} \to 0 \ (x \to +\infty).$$

7. 记 $\mu(\cdot)$ 是 Möbius 函数, $d(n)$ 为除数函数, 即 $d(n)$ 为 n 的正约数的个数, 求证: 当 $Re(s) > 1$ 时, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \text{ 都是解析函数且内闭一致收敛.}$$

进一步, 在 $Re(s) > 1$ 时, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \zeta(s)^{-1}.$$

其中 $\zeta(s)$ 为 Riemann zeta 函数.

8. 记 $S(x)$ 表示 x 以下的无平方因子正整数个数, 即

$$S(x) = \#\{n \mid 1 \leq n \leq x \text{ 且 } n \text{ 为无平方因子整数}\}.$$

求证: $S(x) \sim \dfrac{6}{\pi^2}x$.